TD$_4$ – Intégrales généralisées

Exercice 1 ★★

En utilisant des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 x^{\lambda}\ln(x)^n\,\mathrm{d}x$, où $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^2+2x+2)\cos(2x)\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_2^3 (3x^2-4x+1)\ln(x^5-x^4)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\arctan x\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 ★★★

En utilisant les changement de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x,\ t=\sqrt{x+1}$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^n+1)}\,\mathrm{d}x,\ t=\frac{1}{x}$
3. $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{\mathrm{e}^x}{(3+\mathrm{e}^x)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x,\ t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$
4. $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,\mathrm{d}x,\ t=\frac{1}{x}$
5. $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ où $a>0$, $t=\dfrac{1}{x}$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)\,\mathrm{d}x,\ t=\sin(x)$
7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x)\,\mathrm{d}x,\ t=\tan(x)$

Exercice 3 ★★

Pour n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$, $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ et $K_n = nI_n$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.
2. Montrer que $K_n = \ln 2 - \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer que $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ pour t positif ou nul.
4. En déduire un équivalent de I_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 ★★

Soit $$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et déterminer f'. En déduire les variations de f.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$. En déduire que $f(x)$ est compris entre $x\ln(2)$ et $x^2\ln(2)$.
4. f peut-elle être prolongée par continuité en 0, en 1 ? Si c'est le cas, le prolongement est-il de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 5 Intégrales de Wallis ★★★

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$,

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad W_n \leqslant \frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\varepsilon.$$
3. Justifier ainsi que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ puis en déduire un équivalent de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercice 6 Des sommes de Riemann ★★★

Déterminer les limites suivantes
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

Exercice 7 ★★★

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes (en fonction des paramètres le cas échéant)

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+|\cos t|}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_0^{1}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$;
7. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{t^\alpha}{t^\beta+1}\,\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$.
9. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1-x}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}}$

Exercice 8 ★★★

Déterminer la nature des intégrales suivantes, puis, en cas de convergence, les calculer

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$ $(\sigma \neq 0)$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+2\sqrt{t}+2)\sqrt{t}}$;
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$

Exercice 9 Changements de variable ★★

Déterminer la nature, et le cas échéant, calculer la valeur des intégrales suivantes grâce au changement de variable indiqué.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, poser $u = \dfrac{1}{t}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, poser $u = \sqrt{t}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, poser $x = \dfrac{1}{t}$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$, poser $t = \mathrm{e}^x$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}$, poser $x = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$

Exercice 10 ★★

Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur par une intégration par parties.

Exercice 11 Intégrale de Fresnel ★★★

À l'aide du changement de variable $u = t^2$, puis d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 12 ★★★★

Montrer qu'on a l'équivalent $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$. On pourra effectuer une intégration par parties.

Exercice 13 ★★

1. Déterminer des réels a, b, c tels que $\dfrac{1}{2t(1+t)^2} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1} + \dfrac{c}{(t+1)^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
2. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(1+x)^3}$. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $\displaystyle\int_{]0,1]} f$.

Exercice 14 ★★★★

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale définissant I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) A l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$, montrer que
$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$
   (b) Justifier que l'application $\varphi : u \mapsto u - \dfrac{1}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que φ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle à préciser.
   (c) En posant $v = u - \dfrac{1}{u}$ dans la dernière intégrale de la question 2a, calculer I_1.
   On pourra observer que $v^2 + 2 = u^2 + \dfrac{1}{u^2}$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \dfrac{4n-1}{4n} I_n$.
4. Écrire I_n sous forme d'un produit et en déduire la limite de la suite (I_n).

Exercices issus d'oraux

Exercice 15 ★★★

(*Oral 2013*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \dfrac{1}{t} - \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$

1. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$
2. Prouver que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge
3. Calculer I

Exercice 16 ★★★

(*Oral 2014,2018*)

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

1. Étudier la convergence des intégrales I et J.
2. Montrer que $I = J$
3. Calculer $I + J$ à l'aide du changement de variable $u = t - \dfrac{1}{t}$ et en déduire la valeur de I et J.

Exercice 17 ★★★

(*Oral 2017*)

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)^{2n} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que les intégrales I_n sont convergentes.
2. Calculer I_0.
3. Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la valeur de I_n.
5. Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18 ★★★★

(*Oral 2019*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$
2. Montrer que, pour tout réel $t \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$ et que, pour tout réel t, $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$

   On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t$. On admet que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$
4. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\dfrac{\cos(u)}{\sin(u)}$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n}W_{2n-2}$
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}W_{2n+1}$
6. En déduire la valeur de l'intégrale I.